

Максимальное смещение от положения равновесия по оси ОХ составляет 0,0000017909 м, по оси ОУ – 0,0000017043 м. Соответствующие частоты (21) будут  $\omega_1 = 2464,21377$  Гц;  $\omega_2 = 7051,16538$  Гц;  $\omega_3 = 3532,83615$  Гц.

### **Выводы**

- 1 Разработан численный метод интегрирования, основанный на идеях Ньютона, подходящий для решения широкого круга задач.
- 2 Исследуется использование этого метода для решения задач механики сплошных сред.

**Список литературы:** 1. *Безнос А.С., Шамровский А.Д.* Решение динамических задач для плоских стержневых систем без использования аппарата дифференциальных уравнений при помощи подхода ньютона // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 124-128. 2. *Кривуляк В.В.* Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2008. – № 2. – С. 110-118. 3. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 688 с.

*Поступила в редколлегию 06.05.2010.*

УДК 622.673

**Л.В.ШИПУЛИНА**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
**Н.В.СЕРЕДА**, канд. техн. наук, доц., ХНАГХ

### **ДИНАМИКА УПРУГИХ СИСТЕМ МНОГОКАНАТНЫХ ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ УСТАНОВОК**

У статті побудована й обґрунтована уточнена математична модель багатоканатної піднімальної установки й досліджені динамічні процеси, що виникають у всіх її елементах, з метою підвищення міцності й довговічності піднімальних канатів і канатів, що зрівноважують. Приводяться результати розрахунків.

In article the specified mathematical model of multirope elevating installation is constructed and proved and the dynamic processes, arising in all its elements, for the purpose of increase of strength and durability of elevating and counterbalancing ropes are investigated. The numerical results are presented.

Шахтная подъемная установка представляет собой единую электромеханическую систему «электропривод – машина – канаты – концевые грузы», динамические процессы в которой зависят от упругих характеристик ее элементов и во многом определяются характером движущих сил электропривода [1, 2].

Динамические процессы в подъемной машине описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, учи-

тывающих продольно-крутильные колебания подъемных канатов и продольные колебания уравнивающих канатов [2, 3]:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{g} \cdot \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial t^2} = E_1 F_1 \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} + k_1 E_1 F_1 \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_1}{g} (g \pm \dot{V}_c); \\ \frac{q_1 r_1^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} = k_1 E_1 F_1 \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} + (B + k_1^2 E_1 F_1) \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2}; \\ \frac{q_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i(x,t)}{\partial t^2} = E_2 F_2 \frac{\partial^2 \omega_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_2}{g} (g \pm \dot{V}_c); \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где  $U_i$ ,  $\theta_i$  – продольные и крутильные деформации подъемных канатов;  $\omega_i$  – продольная деформация уравнивающих канатов;  $q_1$ ,  $r_1$  – погонный вес и радиус инерции единицы длины подъемного каната;  $E_1 F_1$ ,  $E_2 F_2$  – жесткость соответственно подъемного и уравнивающего канатов при чистом растяжении;  $B$  – жесткость подъемного каната при чистом кручении;  $k_1$  – коэффициент взаимности крутящих и продольных деформаций подъемного каната;  $\dot{V}_c$  – ускорение точек обода шкива;  $g$  – ускорение свободного падения. Деформации, нагрузки, напряжения и другие обозначения, относящиеся к поднимающейся ветви подъемного каната, обозначены индексом 1, а для опускающейся ветви каната – индексом 2.

При описании движения перекинутого через шкив подъемного каната с двумя концевыми грузами  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенными в направляющих, использовались следующие граничные условия [2, 3]:

а) в поперечных сечениях ветвей каната  $x = l_i(t)$

$$U_i(l_i, t) = \int_0^t \frac{\partial U_i(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad \theta_i(l_i, t) = \int_0^t \frac{\partial \theta_i(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

б) в поперечном сечении каната при  $x = L_i$  граничным условием будет уравнения движения концевых грузов по жестким направляющим, которые исключают возможность раскручивания

$$\begin{aligned} U_i(L_i, t) &= \omega_i(L_i, t); & \theta_i(L_i, t) &= 0; \\ \frac{Q_i}{g} \cdot \frac{\partial^2 U_i(L_i, t)}{\partial t^2} + E_1 F_1 \frac{\partial U_i(L_i, t)}{\partial x} + k_1 E_1 F_1 \frac{\partial \theta_i(L_i, t)}{\partial x} - \\ - E_2 F_2 \frac{\partial \omega_i(L_i, t)}{\partial x} &= Q_i \left( 1 \pm \frac{\dot{V}_c}{g} \right); \end{aligned} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

в) в нижнем конце уравнивающего каната  $x = z_i + l_i(t)$

$$E_2 F_2 \frac{\partial \omega_i(z_i + l_i, t)}{\partial x} = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Начальные условия для определения функций  $U_i(x, t)$ ,  $\theta_i(x, t)$  и  $\omega_i(x, t)$  име-

ют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} U_i(x,0) &= f_i(x); & \theta_i(x,0) &= \varphi_i(x); & \omega_i(x,0) &= p_i(x); \\ \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial t} &= F_i(x); & \frac{\partial \theta_i(x,0)}{\partial t} &= \Phi_i(x); & \frac{\partial \omega_i(x,0)}{\partial t} &= P_i(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f_i, \varphi_i, p_i, F_i, \Phi_i, P_i$  ( $i = 1, 2$ ) – известные функции  $x$ , найденные из условия статического равновесия подъемной установки при  $t = 0$ .

В целях преобразования уравнений в частных производных (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используется сначала переход к интегро-дифференциальным уравнениям путем прямого интегрирования системы (1) по геометрической координате и исключения граничных условий (2)-(4).

В случае, когда длина каната является функцией медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, целесообразно в полученной системе интегро-дифференциальных уравнений перейти к новым переменным  $V_1^{(i)}(x, t)$ ,  $V_2^{(i)}(x, t)$ ,  $V_3^{(i)}(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ), связанных с  $U_i(x, t)$ ,  $\theta_i(x, t)$  и  $\omega_i(x, t)$  соотношением:

$$\begin{aligned} U_i(x, t) &= V_1^{(i)}(x, t) + \int_0^t \frac{\partial V_1^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt + \frac{k_1(x - l_i)}{L_i - l_i} \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \\ \theta_i(x, t) &= V_2^{(i)}(x, t) + \frac{L_i - x}{L_i - l_i} \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \\ \omega_i(x, t) &= V_3^{(i)}(x, t) + \int_0^t \frac{\partial V_1^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt + k_1 \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

В новых переменных система интегро-дифференциальных уравнений принимает вид, удобный для использования асимптотических методов нелинейной механики для исследования этих уравнений. Решение уравнений найдено в виде асимптотических рядов по собственным формам колебаний:

$$V_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_n^{(k)}(x, l) [a_k \cos \psi_k + \varepsilon U_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots] + V_{ncm}(x, l); \quad (n = 1 \div 3) \quad (7)$$

в которых функции  $a_k(l)$  и фазы  $\psi_k(t)$  отдельных тонов колебаний определяются из системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \varepsilon A_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots; & \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k(l) + \varepsilon B_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_k$  – собственные числа, а функции  $U_k^{(1)}(a, \psi, l)$  выражают слабую зависимость между отдельными тонами колебаний, появляющуюся при изменении длины колеблющегося каната. Определив первые собственные частоты и формы продольно-крутильных колебаний подъемных канатов и продольных колебаний уравновешивающих канатов и положив в (8)  $k = 1$ , найдем  $a_{1n}^{(m)}(t)$ ,  $\psi_{1n}^{(i)}(t)$  и подставив их в (7), получим окончательные формулы

для переменных  $V_n^{(i)}(x, t)$  и  $\psi_{1n}^{(i)}(t)$  ( $n = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2$ )

$$\left\{ \begin{aligned} V_1^{(i)}(x, t) &= a_{11}(t_0) a_{11}^{(1)}(t)(x - l_i) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(1)}(t)(x - l_i) \cdot \\ &\cdot \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(1)}(t)(x - l_i) \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{1cm}(x, l_i) \\ V_2^{(i)}(x, t) &= a_{11}(t_0) a_{11}^{(2)}(t)(x - l_i)(L_i - x) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(2)}(t) \cdot \\ &\cdot (x - l_i)(L_i - x) \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(2)}(t)(x - l_i)(L_i - x) \cdot \\ &\cdot \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{2cm}(x, l_i) \\ V_3^{(i)}(x, t) &= a_{11}(t_0) a_{11}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cdot \\ &\cdot \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{3cm}(x, l_i) \\ \frac{d\psi_{1n}^{(i)}}{dt} &= \lambda_n(l_i) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Таким образом, в результате указанных преобразований система уравнений в частных производных (1) сведена к системе (9), состоящей из 6 алгебраических уравнений (3 для поднимающейся и 3 для опускающейся ветви каната) и 6 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, причем коэффициенты  $a_{1n}^{(m)}(t)$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) определены из расчета собственных колебаний (как функции длины каната  $l_i$ ),  $a_{1n}(t_0)$  и  $\gamma_{1n}$  из начальных условий (5).

Система уравнений (9) принята в качестве математической модели подъемной машины при исследовании динамических процессов. К ней нужно добавить уравнения, описывающие процессы в электроприводе:

- а) для подъемной установки с электроприводом по системе «тиристорный преобразователь – двигатель» (ТП-Д)

$$\left\{ \begin{aligned} T_\mu \frac{dE_d}{dt} + E_d &= U_{ax}; \\ ST_\mu \frac{dI_\mu}{dt} + SI_\mu + (1 - S) \omega_1 &= E_d; \\ I_1 \omega_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_\mu I_\mu; \\ I_2 \omega_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) &= -R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)], \end{aligned} \right. \quad (10)$$

- б) для подъемной установки с асинхронным приводом

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 \omega_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{нач} - \beta \omega_1; \\ I_2 \omega_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) &= -R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)], \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где  $T_\mu$  – постоянная времени системы управления ТП-Д;  $E_d$  – э.д.с. преобразователя;  $U_{ax}$  – напряжение на входе системы управления;  $T_\mu$  и  $I_\mu$  – постоянная

времени и ток якорной цепи;  $S$  – скольжение;  $c_{12}$  – приведенная крутильная жесткость валопровода;  $\omega_1 = \dot{\phi}_1$  и  $\omega_2 = \dot{\phi}_2$  – угловые скорости вращения двигателя и ведущего шкива;  $R$  – радиус ведущего шкива;  $M_{нач} - \beta \omega_1$  – момент, развиваемый асинхронным двигателем с учетом переключения ступеней (за счет изменения  $\beta$ );  $P_1^{(1)}(x, t)$  и  $P_1^{(2)}(x, t)$  – усилия каната соответственно поднимающейся и опускающейся ветви.

Совокупность уравнений (9) и (10) или (9) и (11) представляют собой математическую модель подъемной установки как единой электромеханической системы «электропривод–машина–канаты–концевые грузы». При этом влияние процессов в канатах на электропривод определяется членом  $-R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)]$  в уравнениях (10) и (11), а влияние процессов в электроприводе и валопроводе на колебания в канатах проявляется в коэффициентах  $a_{1n}^{(m)}(t)$ , являющимися функциями длины канатов  $l_i$ , где  $l_i$  определялось интегрированием уравнения  $\frac{dl_i}{dt} = \pm R \omega_i$ ; ( $i = 1, 2$ ).

Для исследования динамических усилий и эквивалентных напряжений в упругих элементах шахтной подъемной установки с помощью численного моделирования уравнений (9) и (10) или (9) и (11) рассматривались нормальные режимы: пуск, установившееся движение, торможение.

Установлено, что основное влияние на динамические усилия в упругих элементах подъемной установки в режиме пуска оказывают особенности внешнего силового воздействия, в частности, механические характеристики запуска двигателей. Так, при пуске асинхронного двигателя скачкообразное изменение пускового и движущего момента вызывают значительные колебания динамических усилий в валопроводе и в канатах подъемной машины, что не наблюдается в подъемных установках с тиристорным приводом, вследствие лучших регулировочных характеристик этого привода.

Характер динамических усилий, возникающих в упругих элементах подъемной установки с асинхронным двигателем, в режиме установившегося движения и торможения такой же, как и для подъемной установки с тиристорным двигателем; в этих режимах не наблюдается заметных колебаний динамических усилий.

В режиме торможения динамические усилия в канатах достигают максимального значения в первый период процесса предохранительного торможения, то есть до останова ведущего шкива.

В результате численного исследования получены данные о величинах наибольших продольных и крутильных деформаций и напряжений, возникающих в канатах.

Основным критерием, по которому можно судить о работоспособности каната, следует принимать характер распределения напряжений в его попе-

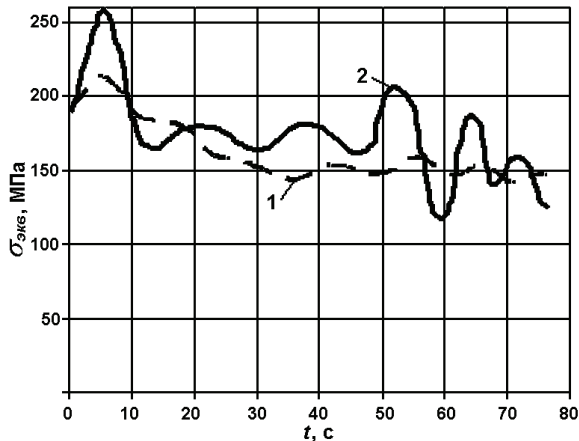
речном сечении. В связи с конструктивными особенностями каната как сложной механической системы, основными напряжениями, возникающими в проволочках каната, являются: нормальные напряжения от осевого растяжения  $\sigma_{раст}$ , изгибные нормальные напряжения  $\sigma_{изг}$ , касательные напряжения от кручения  $\tau_{кр}$  и эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эkv} = \sqrt{(\sigma_{раст} + \sigma_{изг})^2 + 3\tau_{кр}^2}.$$

Расчет напряжений по всей длине каната показал, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в подъемных канатах груженой ветви в верхнем крайнем положении сосуда в стволе, а наименьшие эквивалентные напряжения возникают в разгруженной ветви каната при нахождении сосуда в нижнем крайнем положении. Общая картина распределения напряжений показывает, что разброс напряжений по длине каната увеличивается по мере уменьшения длины каната.

Аналогичная картина распределения напряжений по длине каната наблюдается в уравнивающих канатах; максимальные напряжения уравнивающий канат испытывает вблизи верхней приемной площадки.

На рисунке приведены значения напряжений, возникающих в поднимающейся ветви головного каната подъемной установки, полученные для двух типов приводов: тиристорного и асинхронного, что позволяет сравнить между собой эти приводы с позиций прочности механической части подъемной установки.



Напряжения в поднимающейся ветви головного каната подъемной установки с:  
1 – тиристорным приводом; 2 – асинхронным приводом

На основании полученных напряжений по кривым долговечности каната можно оценить, что срок службы канатов при переходе с асинхронного на тиристорный привод увеличивается в 1,6 раза.

**Список литературы:** 1. Найдено И.С., Белый В.Д. Шахтные многоканатные подъемные установки. – М.: Недра, 1979. – 391 с. 2. Степанов А.Г. Динамика шахтных подъемных установок. – М.: Наука, 1994. – 203 с. 3. Степанов А.Г. Динамика машин. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 304 с.

*Поступила в редколлегию 11.01.2010*

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»  
**Н.И.ВОРОПАЙ**, аспирант, ХНАДУ

## **УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Досліджено неосесиметричне деформування круглої пружної нескінченно довгої циліндричної оболонки під дією навантаження. Розглянуто керування прогином оболонки. Моделювання деформування оболонки виконується на основі уточненої теорії С.П. Тимошенко. При визначенні керуючої сили використано метод регуляризації А.М. Тихонова.

An asymmetric deformation of the cylindrical shell under impulse load is investigated. The shell is supposed to be round, elastic and infinitely long. The controlling of the shell deflection is considered. The simulation of the shell deforming is based on S.P. Timoshenko's refined theory. The Tihonov's regularizing method is used at determination control force.

В данной работе представлена постановка и решение задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки. Сущность указанной задачи в следующем: пусть на бесконечно длинную круглую упругую цилиндрическую оболочку воздействует нагрузка, закон изменения во времени которой известен и которая вызывает первичный нестационарный колебательный процесс. Предположим также, что на колебания оболочки налагается некоторое условие (критерий управления) в некоторой точке вдоль направляющей ее срединной поверхности. Для удовлетворения требуемого условия к цилиндрической оболочке прилагается управляющая сила в некоторой другой точке, закон изменения которой во времени подлежит определению.

Задача управления нестационарными колебаниями оболочки состоит в определении закона изменения управляющей силы во времени при условии задания конкретной точки приложения этой силы. Удовлетворение критерию колебаний реализует управление только в одной точке оболочки.

Рассмотрим математическую постановку задачи управления для цилиндрической оболочки (рис. 1). Пусть возмущающая сила  $Q(t^*)$  приложена в точке  $\theta_0$ ; точка, в которой требуется управлять колебаниями –  $\theta_s$ ;  $\theta_c$  – точка